BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ
№3 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2005

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ВЕРХНЕЙ ГРАНИ ОТКЛОНЕНИЙ СУММАТОРНОГО АНАЛОГА ИНТЕГРАЛА ДЖЕКСОНА ПО КЛАССУ ЛИПШИЦА ЧЕРЕЗ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА

Дж.М.АЛИЕВ, А.Дж.АЛИЕВА
Бакинский Государственный Университет

В работе изучается асимптотическое поведение остатка при приближений периодических функций тригонометрическими полиномами. Полученные результаты имеют научную новизну и представляют определенную ценность.

Следуя А.В.Ефимову [1] перейдем к изучению величины

$$E_{\widetilde{F}_n}(Lip_k\alpha; x) = \sup_{f\in Lip_k\alpha}\left|f(x) - \widetilde{F}_n(f, x)\right|, \tag{1}$$

при $0 \le \alpha \le 1$, где

$$\widetilde{F}_n(f; x) = \frac{2\pi}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} f(x_k^{(n)})K_n(x_k^{(n)} - x);$$

$x_k^{(n)} = \dfrac{2k\pi}{2n+1}$, $k = 0,1,2,...,2n,$ причем ядра $k_n(t) \ge 0$ имеют вид

$$k_n(t) = \frac{1}{\pi}[\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n}(\rho_m^{(n)}\cos mt + \gamma_m^{(n)}\sin mt)].$$

Прежде всего заметим, что вместо класса Lip_k^{α} можно рассматривать класс к $Lip_1\alpha$, так как

$$E_{\widetilde{F}_n}(Lip_k\alpha; x) = kE_{\widetilde{F}_n}(Lip_1\alpha; x) \tag{2}$$

В дальнейшем воспользуемся утверждениями, которые отмечались в [2] и других авторов при установлении различных асимптотических формул:

а) $E_{\widetilde{F}_n}(T; x+h) = E_{\widetilde{F}_n}(T),$ (3)

если

$$h = \frac{2\pi}{2n+1}, \quad T = Lipa\,(0 < a \le 1)$$

Стало быть, при изучении $E_{\widetilde{F}_n}(Lip_1\alpha; x)$ можно ограничиться лишь значениями x из $[0, \dfrac{2\pi}{2n+1}]$.

$$\text{в)}\, E_{\widetilde{F}_n}(Lip_1\alpha; x) = \frac{2\pi}{2n+1} \sum_{-\pi \le x_k^{(n)} - x \le \pi}^{2n} \left| x_k^{(n)} - x \right|^{\alpha} K_n(x_k^{(n)} - x). \qquad (4)$$

Пусть

$$\widetilde{P}_{2n-2}^{(2)}(f; x) = \frac{3}{(4n-3)n(2n^2+1)} \sum_{k=0}^{4n-4} f(x_k^{(n)}) \left(\frac{\sin n \dfrac{x_k^{(n)}}{2}}{\sin \dfrac{x_k^{(n)} - x}{2}} \right)^4$$

-сумматорный аналог интеграла Джексона, где

$$x_k^{(n)} = \frac{2k\pi}{4n-3},\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Теорема: Для величины $\mathrm{E}_{\widetilde{P}_{2n-2}^{(2)}}(Lip_1\alpha; x)$ справедлива асимптотическая формула:

$$\widetilde{P}_{2n-2}^{(2)}(Lip_1\alpha; x) = \frac{3}{\pi^{4-\alpha} 2^{3-\alpha} n^{\alpha}} \left\{ \frac{(8\pi)^{4-\alpha} \sin^4 \dfrac{u_n}{8}}{u_n^{4-\alpha}} + \sum_{k=1}^{4} [\sin^4(\frac{u_n}{8} + \frac{k\pi}{4}) \times \right.$$

$$\left. \times \xi(4-\alpha, \frac{u_n}{8\pi} + \frac{k}{4}) + \sin^4(-\frac{u_n}{8} + \frac{k\pi}{4}) \xi(4-\alpha, -\frac{u_n}{8\pi} + \frac{k}{4})] \right\} + 0(n^{-\alpha}), \qquad (5)$$

где

$$u_n = x(4n-3), 0 \le u_n < 2\pi,\ 0 < \alpha \le 1,\ 0 \le x < \frac{2\pi}{4\pi - 3}$$

и

$$\xi(s, v) = \sum_{n=0}^{\infty} (v+n)^{-s} \quad (v \ne 0, -1, -2, \ldots)$$

-дзета-функции Римана.

Доказательство: В силу утверждения в), имеем

$$\widetilde{P}_{2n-2}^{(2)}(Lip_1\alpha; x) = \frac{3}{(4\pi-3)n(2n^2+1)} \sum_{-\pi \le x_k^{(n)} - x \le \pi}^{2n} \left| x_k^{(n)} - x \right|^{\alpha} \left(\frac{\sin n \dfrac{x_k^{(n)} - x}{2}}{\sin \dfrac{x_k^{(n)} - x}{2}} \right)^4, \qquad (6)$$

причем можно считать, что $0 \le x \le \dfrac{2\pi}{4\pi - 3}$.

Так как

$$\Delta_n=\left(\frac{\sin n\frac{x_k-x}{2}}{\sin\frac{x_k-x}{2}}\right)^4=\left(\frac{\sin n\frac{x_k-x}{2}}{\sin\frac{x_k-x}{2}}\right)^2(\sin n\frac{x_k-x}{2})^2\times$$

$$\times\left[\frac{1}{(\sin\frac{x_k-x}{2})^2}-\frac{1}{(\frac{x_k-x}{2})^2}+\frac{1}{(\frac{x_k-x}{2})^2}\right] \tag{7}$$

и, кроме того

$$\frac{1}{\sin^2 t}-\frac{1}{t^2}=O(1)\quad\text{для}\quad |t|\le\frac{\pi}{2},\ \text{то}$$

$$\Delta_n=\left(\frac{\sin n\frac{x_k-x}{2}}{\sin\frac{x_k-x}{2}}\right)(\sin n\frac{x_k-x}{2})^2\,[O(1)+(\frac{x_k-x}{2})^2], \tag{8}$$

но

$$\sum_{-\pi\le x_k-x\le\pi}\left(\frac{\sin n\frac{x_k-x}{2}}{\sin\frac{x_k-x}{2}}\right)^2=\sum_{-\pi\le x_k-x\le\pi}^{2n}\left\{n+2\sum_{m=1}^{n-1}(n-m)\cos m(x_k-x)\right\}=$$

$$=\sum_{k=0}^{4n-4}\left\{n+2\sum_{m=0}^{n-1}(n-m)\cos m(x_k-x)\right\}=n(4n-4). \tag{9}$$

По этому

$$E_{\tilde{P}^{(2)}_{2n-2}}(Lip_1\alpha;x)=O(n^{-2})+\frac{3}{(4n-3)n(2n^2+1)}\times$$

$$\times\sum_{-\pi\le x_k-x\le\pi}\left|x_k^{(n)}-x\right|^{\alpha}\times\left(\frac{\sin n\frac{x_k-x}{2}}{\sin\frac{x_k-x}{2}}\right)^2(\sin n\frac{x_k-x}{2})^2\times$$

$$\times\left[\frac{1}{(\sin\frac{x_k-x}{2})^2}-\frac{1}{(\frac{x_k-x}{2})^2}+\frac{1}{(\frac{x_k-x}{2})^2}\right]=\frac{3\cdot 2^4}{(4n-3)n(2n^2+1)}\times$$

$$\times\sum_{-\pi\le x_k-x\le\pi}\frac{\sin^4 n\frac{x_k-x}{2}^2}{(x_k-x)^{4-\alpha}}+O(n^{-2}). \tag{10}$$

Положим $u_n = x(4n-3)$. Тогда $x_k - x = \dfrac{2k\pi - u_n}{4n-3}$. Следовательно,

$$E_{\tilde{P}^{(2)}_{2n-2}}(Lip_k\alpha; x) = \frac{3\cdot 2^4(4n-3)^{4-\alpha}}{(4n-3)n(2n^2+1)}\times$$

$$\times \sum_{-\pi(4n-3)\le 2k\pi-u_n\le\pi(4n-3)} \frac{\sin^4 n\dfrac{2k\pi-u_n}{8n-6}}{\left|2k\pi-u_n\right|^{4-\alpha}} + O(n^{-2}). \tag{11}$$

Покажем теперь, что разность

$$\sum_{|2k\pi-u_n|\le\pi(4\pi-3)} \frac{\sin^4 n\dfrac{2k\pi-u_n}{8n-6}}{\left|2k\pi-u_n\right|^{4-\alpha}} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^4 \dfrac{2k\pi-u_n}{8}}{\left|2k\pi-u_n\right|^{4-\alpha}} =$$

$$= \left[\sum_{|2k\pi-u_n|\le\pi(4\pi-3)} \frac{\sin^4 n\dfrac{2k\pi-u_n}{8n-6}}{\left|2k\pi-Un\right|^{4-\alpha}} \sum_{|2k\pi-u_n|\le\pi(4\pi-3)} \frac{\sin^4 \dfrac{2k\pi-u_n}{8}}{\left|2k\pi-u_n\right|^{4-\alpha}}\right] +$$

$$+ \left[\sum_{|2k\pi-u_n|\le\pi(4\pi-3)} \frac{\sin^4 \dfrac{2k\pi-u_n}{8}}{\left|2k\pi-u_n\right|^{4-\alpha}} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^4 \dfrac{2k\pi-u_n}{8}}{\left|2k\pi-u_n\right|^{4-\alpha}}\right] \tag{12}$$

стремится к нулю при $n \to \infty$.

Рассмотрим разность, стоящую в последней скобке,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^4 \dfrac{2k\pi-u_n}{8}}{\left|2k\pi-u_n\right|^{4-\alpha}} - \sum_{|2k\pi-u_n|\le\pi(4\pi-3)} \frac{\sin^4 \dfrac{2k\pi-u_n}{8}}{\left|2k\pi-u_n\right|^{4-\alpha}} =$$

$$= \sum_{|2k\pi-u_n|\ge\pi(4\pi-3)} \frac{\sin^4 \dfrac{2k\pi-u_n}{8}}{\left|2k\pi-u_n\right|^{4-\alpha}} \le \sum_{|2k\pi-u_n|>\pi(4\pi-3)} \frac{1}{\left|2k\pi-u_n\right|^{4-\alpha}}. \tag{13}$$

Пусть $\left|t-u_n\right| > \pi(4\pi-3)$

$$\int_{\pi(4n-3)+u_n} \frac{dt}{(t-u_n)^{4-\alpha}} = \int_0^{\infty} \frac{dt}{[t+\pi(4n-3)]^{4-\alpha}} = O(n^{-(3-\alpha)}). \tag{14}$$

Аналогично

$$\int_{-\infty}^{u_n-\pi(4n-3)} \frac{dt}{(u_n-t)^{4-\alpha}} = O(n^{-(3-\alpha)}). \tag{15}$$

из формул (14) и (15) следует, что

$$\sum_{|2k\pi-u_n|\geq\pi(4\pi-3)} \frac{1}{|2k\pi-u_n|^{4-\alpha}} = O(n^{-(3-\alpha)}). \tag{16}$$

Разность, стоящая в первой скобке (12), равно:

$$\sum_{|2k\pi-u_n|\leq\pi(4\pi-3)} \left[\frac{\sin^4 \dfrac{2k\pi-u_n}{8}}{|2k\pi-u_n|^{4-\alpha}} - \frac{\sin^4 \dfrac{2k\pi-u_n}{8}}{|2k\pi-u_n|^{4-\alpha}} \right] =$$

$$= \left[\frac{\sin^4 n\dfrac{u_n}{8}}{(u_n)^{4-\alpha}} - \frac{\sin^4 \dfrac{u_n}{8}}{(u_n)^{4-\alpha}} \right] + \left[\frac{\sin^4 \dfrac{2k\pi-u_n}{8n-6}}{(2\pi-u_n)^{4-\alpha}} - \frac{\sin^4 \dfrac{2\pi-u_n}{8}}{(2\pi-u_n)^{4-\alpha}} \right] +$$

$$+ \sum_{2\pi\leq|2k\pi-u_n|\leq\pi(4\pi-3)} \left[\frac{\sin^4 n\dfrac{2k\pi-u_n}{8n-6}}{|2k\pi-u_n|^{4-\alpha}} - \frac{\sin^4 \dfrac{2k\pi-u_n}{8}}{|2k\pi-u_n|^{4-\alpha}} \right] \tag{17}$$

Пусть ε любое число $(\varepsilon > 0)$, $z = \sin^4 y$,

$$y_1^{(n)} = n\frac{2k\pi-u_n}{8n-6}, \quad y_2^{(n)} = \frac{2k\pi-u_n}{8};$$

$$\left|\sin^4 y_1^{(n)} - \sin^4 y_2^{(n)}\right| \leq 4\left|y_1^{(n)} - y_2^{(n)}\right| =$$

$$= 4|2k\pi-u_n|\left|\frac{n}{8n-6} - \frac{1}{8}\right| < \varepsilon|2k\pi-u_n| \tag{18}$$

для $n > N$.

Поэтому последняя сумма не превосходит

$$\sum_{|2k\pi-u_n|\leq\pi(4\pi-3)} \frac{1}{|2k\pi-u_n|^{4-\alpha}} \leq$$

$$\leq 2\varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k\pi+2\pi)^{3-\alpha}} = 2K\varepsilon,$$

$$K = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k\pi+2\pi)^{3-\alpha}} \tag{19}$$

Наконец, докажем, что первые две разности в правой части (17) стремятся к нулю при $n \to \infty$.

Обозначим

$$\tau_n = \frac{\sin^4 n\dfrac{u_n}{8n-6} - \sin^4 \dfrac{u_n}{8}}{u_n^{4-\alpha}}.$$

Так как $\lim\limits_{\beta\to 0}\dfrac{\sin^4\beta}{\beta^4}=1,$ то по любому $\varepsilon>0$ найдется такое δ ,что для $|\beta|<\delta$

$$\left|\frac{\sin^4\beta-\beta^4}{\beta^4}\right|\le\frac{\varepsilon}{3(2n)^{\alpha}}\ . \tag{20}$$

Рассмотрим два случая:

1) Существует такой номер $N,$ что для всех $n>N, u_n\ge\delta.$

$$|\tau_n|\le\frac{4}{(un)^{3-\alpha}}\left|\frac{n}{8n-6}-\frac{1}{8}\right|\le\frac{4}{\delta^{3-\alpha}}\left|\frac{n}{8n-6}-\frac{1}{8}\right|. \tag{21}$$

для $n>N.$ Поэтому $\tau_n\to 0,\ n\to\infty.$

2) Такого номера N нет. Тогда существует под последовательность $u_{nk}, u_{nk}<\delta, n_k\to\infty$ при $k\to\infty.$

Обозначим для простоты n_k буквой n .

$$\tau_n=u_n^{\alpha}\left[(\frac{n}{8n-6})^4\cdot\frac{\sin^4 n\dfrac{u_n}{8n-6}-(n\cdot\dfrac{u_n}{8n-6})^4}{(n\cdot\dfrac{u_n}{8n-6})^4}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{8^4}\frac{(\dfrac{u_n}{8})^4-\sin^4\dfrac{u_n}{8}}{(\dfrac{u_n}{8})^4}+\frac{(n\cdot\dfrac{u_n}{(8n-6)^4}-(\dfrac{u_n}{8})^4}{u_n{}^4}\right], \tag{22}$$

но

$$\frac{n}{8n-6}<1\quad\text{и поэтому}\quad\frac{nu_n}{8n-6}\le\delta.$$

Используя неравенства (20), получим:

$$\tau_{n_k}\to 0,\ k\to\infty.$$

Если после исключения из всей последовательности u_n множества $\{u_{n_k}\}$ оставшаяся под последовательность u_{np} бесконечна, то $\tau_{n_p}\to 0$ при $p\to\infty$ (см. случай 1)); если множество $\{u_{n_p}\}$ конечно, то начиная с некоторого номера $N_1,$ для всех $n>N_1, u_n<\delta$ и переходим к случаю 2). Для второй разности (17) можно провести аналогичные рассуждения.

Таким образом,

$$E_{\tilde{P}^{(2)}_{2n-2}}(Lip_1\alpha;x)=\frac{3\cdot 2^4(4n-3)^{3-\alpha}}{n(2n^2+1)}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\sin^4\dfrac{2k\pi-u_n}{8}}{|2k\pi-u_n|^{4-\alpha}}+O(n^{-\alpha}). \tag{23}$$

Остается учесть, что

$$\sum=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\sin^4\frac{2k\pi-u_n}{8}}{\left|2k\pi-u_n\right|^{4-\alpha}}=O(1), \tag{24}$$

$$\frac{3\cdot 2^4(4n-3)^{3-\alpha}}{n(2n^2+1)}-\frac{3\cdot 2^{9-2\alpha}}{n^{\alpha}}=o(n^{-\alpha}), \tag{25}$$

Величину $E_{\widetilde{P}^{(2)}_{2n-2}}(Lip_1\alpha;x)$ можно выразить через функцию $\xi(s,v)=\sum_{n=0}^{\infty}(v+n)^{-s}$, $v\neq 0,-1,-2,...$ -обобщение дзета-функции Римана [3].

$$\sum=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\sin^4\frac{2k\pi-u_n}{8}}{\left|2k\pi-u_n\right|^{4-\alpha}}=\frac{\sin^4\frac{u_n}{8}}{u_n^{4-\alpha}}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^4\frac{2k\pi+u_n}{8}}{(2k\pi+u_n)^{4-\alpha}}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^4\frac{2k\pi-u_n}{8}}{(2k\pi+u_n)^{4-\alpha}}=\frac{\sin^4\frac{u_n}{8}}{u_n^{4-\alpha}}+\Omega(u_n 2\pi)+\Omega(2\pi-u_n), \tag{26}$$

где

$$\Omega(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^4\frac{2k\pi+t}{8}}{u_n^{4-\alpha}},\ t>0. \tag{27}$$

Полагая $k\equiv l\ (\text{mod}.4)$, $l=\overline{0,3}$ и разбивая последнюю сумму на четыре суммы, получим:

$$\Omega(t)=\frac{1}{8\pi^{4-\alpha}}\sum_{k=0}^{3}\sin^4\left(\frac{t}{8}+\frac{k\pi}{4}\right)\xi\left(4-\alpha,\frac{t}{8\pi}+\frac{k}{u}\right) \tag{28}$$

Поэтому

$$\Omega(\pm u_n+2\pi)=\frac{1}{(8\pi)^{4-\alpha}}\sum_{k=1}^{4}\sin^4\left(\pm\frac{u_n}{8}+\frac{k\pi}{4}\right)\xi\left(4-\alpha,\frac{u_n}{8\pi}+\frac{k}{4}\right)$$

Откуда следует (5) и теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.В.Ефимов. О приближении некоторых классов непрерывных функций суммами Фурье и суммами Фейера. Изв.АН СССР, сер.мат., 22,1958.
2. А.Дж.Алиева. О порядке и классе насыщения линейного интегрального оператора и его сумматорного аналога. Вестник БГУ, сер. физ.-матем. Наук, 2001, №1.
3. Е.К.Титчмарш. Дзета –функция Римана. М.,1947.

LİPŞİS SİNFİNDƏ CEKSON CƏM ANALOQUNUN MEYLİNİN YUXARI SƏRHƏDİNİN ASİMPTOTİK QİYMƏTİNİN RİMAN FUNKSİYASI İLƏ İFADƏSİ

C.M.ƏLİYEV, A.C.ƏLİYEVA

ANNOTASİYA

Məqalədə Lipşis sinfində Cekson cəm analoqunun meylinin yuxarı sərhəddinin asimptotik qiymətinin Riman funksiyası ilə ifadəsi tapılır.

THE APPROXIMATION OF PERIODIC FUNCTIONS BY TRIGONOMETRIC POLYNOMIALS

D.M.ALIYEV, A.D.ALIYEVA

ABSTRACT

The asymptotic behavior of remainder at the approximation of periodic functions by trigonometric polynomials is studied in the paper.